JOURNAL OF APPROXIMATION THEORY 33, 1–27 (1981)

L^p-Approximation durch Reihen nach dem Haar-Orthogonalsystem und dem Faber–Schauder-System

P. OSWALD

Sektion Mathematik, Technische Universität Dresden, 8027 Dresden, GDR

Communicated by P. L. Butzer

Received August 6, 1979

In dieser Arbeit soll die Approximationsgeschwindigkeit bei der Darstellung von Funktionen $f \in L^p(0, 1)$, $0 < p < \infty$, durch Reihen nach dem Haar- bzw. Faber–Schauder-System untersucht werden.

Zur Erläuterung der Fragestellung betrachten wir das Haar-System $H = \{\chi_i\}_{i=1}^{\infty}$ und definieren die Bestapproximationen

$$E_n^p(f) = \inf_{h \in H_n} \|f - h\|_{L^p}, \quad n = 1, 2, \dots, f \in L^p, \ 0 < p < \infty, \tag{0.1}$$

wobei $H_n = \operatorname{span}\{\chi_i\}_{i=1}^n$ entsprechende Klassen von Treppenfunktionen sind. Bekanntlich gilt die Jackson-Typ-Ungleichung

$$E_n^p(f) \leqslant C_p \omega_p \left(\frac{1}{n}, f\right), \qquad n = 1, 2, \dots, f \in L^p, \ 0 < p < \infty, \tag{0.2}$$

mit dem Stetigkeitsmodul

$$\omega_p(t, f) = \sup_{0 \leqslant h \leqslant t} \left\{\int_0^{1-h} |f(x) - f(x+h)|^p \, dx\right\}^{1/p}, \qquad t \in (0, 1], \tag{0.3}$$

(mit C, $C_p, \dots$ bezeichnen wir positive Konstanten, die nur von den angegebenen Parametern abhängen und im allgemeinen von Formel zu Formel verschieden sind). Für $1 \leqslant p < \infty$ ist (0.2) wohlbekannt, der Fall $0 < p < 1$ wurde von V. G. Krotov in [11] und V. I. Ivanov [5] bewiesen.

Da das Haar-System H eine Basis in L^p, $1 \leqslant p < \infty$, bildet, so konvergiert die Haar-Forierreihe $\sum_{i=1}^{\infty} c_i(f) \chi_i$, $c_i(f) = \int_0^1 f(x) \chi_i(x) \, dx$, $i = 1, 2, \dots$, für jede Funktion $f \in L^p$, mehr noch, es gilt

$$E_n^p(f) \leqslant \left\| f - \sum_{i=1}^{n} c_i(f) \chi_i \right\|_{L^p} \leqslant 2E_n^p(f), \qquad n = 1, 2, \dots, 1 \leqslant p < \infty. \tag{0.4}$$

0021-9045/81/090001-27\$02.00/0

Diese Abschätzung zeigt, daß für L^p, $1 \leqslant p < \infty$, zwischen der Approximation durch die Partialsummen der Haar-Fourierreihe von f und den entsprechenden Bestapproximationen (0.1) kein wesentlicher Unterschied besteht.

Für $0 < p < 1$ dagegen bezitzen die Quasi-Banachräume L^p keine Basis Systeme. Allerdings folgt aus Ergebnissen von A. A. Talaljan [12] daß jede Funktion $f \in L^p$, $0 < p < 1$, durch (unendlich viele) Haar–Reihen dargestellt werden kann, d.h. es existieren Reihen $\sum_{i=1}^{\infty} a_i \chi_i(x)$ mit

$$\|f - S_n\|_{L^p} = o(1), \qquad n \to \infty;\ f \in L^p,\ 0 < p < 1. \tag{0.5}$$

Dabei bezeichnen wir mit $S_n(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_i(x)$, die Partialsummen dieser Reihen. Im Vergleich zu (0.5) weitergehende Abschätzungen der Approximationsgeschwindigkeit bei der Darstellung durch Reihen (z.B. in Abhängigkeit von Glattheitseigenschaften der Funktion f) sind nicht bekannt. So scheint u.a. nicht klar zu sein, ob bei entsprechender Wahl von $\sum_{i=1}^{\infty} a_i \chi_i$ für de Größen $\|f - S_n\|_{L^p}$ (0.5) durch eine Jackson-Typ-Ungleichung analog zu (0.2) ersetzt werden kann.

Ähnliche Fragen sind für die Darstellung von Funktionen aus L^p, $0 < p < \infty$, mit Reihen nach dem Faber–Schauder-System ebenfalls unbeantwortet.

In §1 beschäftigen wir uns mit diesen Problemen im Falle des Haar-Systems ($0 < p < 1$) und beweisen folgende Sätze.

THEOREM 1. *Sei $f \in L^p(0, 1)$, $0 < p < 1$. Dann existieren Reihen $\sum_{i=1}^{\infty} a_i \chi_i(x)$, für die die Beziehung*

$$\|f - S_n\|_{L^p} \leqslant C_p \cdot n^{-(1/p-1)} \left\{ \int_{(n+1)^{-1}}^{1} \frac{\omega_p(t, f)^p}{t^{2-p}}\, dt \right\}^{1/p}, \qquad n = 1, 2, \ldots \tag{0.6}$$

gültig ist.

THEOREM 2. *Sei $f \in L^p(0, 1)$, $0 < p < 1$, und*

$$\int_0^1 t^{-2+p} \omega_p(t, f)^p\, dt < \infty \tag{0.7}$$

Dann ist f integrierbar und für die Partialsummen $S_n f(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i(f)\, \chi_i(x)$ der Haar-Fourierreihe von f gilt

$$\|f - S_n f\|_{L^p} \leqslant C_p \cdot n^{-(1/p-1)} \left\{ \int_0^{1/n} \frac{\omega_p(t, f)^p}{t^{2-p}}\, dt \right\}^{1/p}, \qquad n = 1, 2, \ldots. \tag{0.8}$$

Beide Abschätzungen ergänzen sich in gewisser Weise und führen zu einer Reihe interessanter Aussagen. Zur Illustration wollen wir die Klassen

$$\mathrm{Lip}(\alpha, p) = \{f \in L^p(0, 1) : \omega_p(t, f) = O(t^\alpha), t \to 0\},$$
$$\alpha \in (0, \max(1, 1/p)) \quad (0.9)$$

heranziehen (zur Definition im Falle $0 < p < 1$ s. [11]). Für $f \in \mathrm{Lip}(\alpha, p)$, $0 < p < 1$, liefert Theorem 1 die Existenz von Reihen mit der Eigenschaft

$$\|f - S_n\|_{L^p} = O\begin{cases} n^{-\alpha}, & 0 < \alpha < 1/p - 1, \\ n^{-(1/p-1)} \ln^{1/p} n, & \alpha = 1/p - 1, n \to \infty, \\ n^{-(1/p-1)}, & 1/p - 1 < \alpha < 1/p, \end{cases} \quad (0.10)$$

während sich gemäß Theorem 2 für die Haar-Fourierreihe sogar

$$\|f - S_n f\|_{L^p} = O(n^{-\alpha}), \quad 1/p - 1 < \alpha < 1/p, \quad n \to \infty, \quad (0.11)$$

ergibt. Damit zeigt sich, daß für Funktionen aus den Klassen $\mathrm{Lip}(\alpha, p)$ $(\alpha \neq 1/p - 1)$ dieselbe Approximationsgeschwindigkeit, wie sie gemäß (0.2) für die Bestapproximationen $E_n^p(f)$ gesichert ist, auch durch die Partialsummen einer gewissen Reihe erreicht werden kann.

Im "kritischen" Fall $\alpha = 1/p - 1$ dagegen kann ein solches in gewissem Sinne optimales Konvergenzverhalten bei der Darstellung durch Haar-Reihen mit Hilfe obiger Abschätzungen nicht nachgewiesen werden. Daß das kein Zufall ist, folgt aus dem in § 2 konstruierten Beispiel einer Funktion $f_0 \in \mathrm{Lip}(1/p - 1, p)$ mit der Eigenschaft, daß für beliebige Haar-Reihen

$$\varlimsup_{n \to \infty} \frac{\|f - S_n\|_{L^p}}{n^{-(1/p-1)} \cdot \ln n} > 0, \quad 0 < p < 1, \quad (0.12)$$

gilt. Aus (0.12) ergibt sich gleichzeitig, daß eine zu (0.2) analoge Jackson-Typ-Ungleichung für die Größen $\|f - S_n\|_{L^p}$ nicht möglich ist. Im Zusammenhang damit stellt sich die folgende Frage. Sei

$$H_p^w = \{f \in L^p(0, 1) : \omega_p(t, f) = O(w(t)), t \to 0\}, \quad 0 < p < 1 \quad (0.13)$$

(bezüglich der Eigenschaften von $w(t)$ s. §2). Welche notwendigen und hinreichenden Bedingungen an $w(t)$ garantieren für jede Funktion $f \in H_p^w$ die Existenz einer gewissen Haar-Reihe mit

$$\|f - S_n\|_{L^p} = O\left(w\left(\frac{1}{n}\right)\right), \quad n \to \infty \quad (0.14)$$

Eine Antwort gibt Theorem 3 in §2. In diesem Paragraph untersuchen wir außerdem unter Benutzung von Theorem 2, ob das Haar-System H eine Basis in gewissen Räumen vom Besov-Typ $B_{p,q}^s$ für $0 < p < 1$ bildet. Diese

Fragestellung entstand im Zusammenhang mit Ergebnissen von H. Triebel [15].

Ähnliche Probleme bezüglich der Approximationsgeschwindigkeit bei der Darstellung von Funktionen aus L^p (insbesondere für $1 \leqslant p < \infty$) durch Reihen nach dem Faber–Schauder-System werden in §3 ausführlich betrachtet.

1

In diesem Paragraph sei $f \in L^p(0, 1)$, $0 < p < 1$. Der in (0.3) definierte Stetigkeitsmodul $\omega_p(t, f)$ der Funktion f hat folgende Eigenschaften (zum Beweis s. [11]):

$$\begin{aligned} 0 \leqslant \omega_p(t, f)^p &\leqslant \omega_p(t+\tau, f)^p \\ &\leqslant \omega_p(t, f)^p + \omega_p(\tau, f)^p, \qquad 0 < t < t+\tau \leqslant 1 \\ \omega_p(nt, f) &\leqslant n^{1/p} \omega_p(t, f), \qquad 0 < nt \leqslant 1, \quad n = 1, 2, \ldots \end{aligned} \tag{1.1}$$

Eine wichtige Rolle spielen für $0 < p < 1$ die Ungleichungen

$$\left| \sum_{i=1}^{m} a_i \right|^p \leqslant \sum_{i=1}^{m} |a_i|^p, \qquad -\infty < a_i < +\infty, \quad i = 1, \ldots, m \tag{1.2}$$

und

$$\left\| \sum_{i=1}^{m} f_i \right\|_p^p \leqslant \sum_{i=1}^{m} \|f_i\|_p^p, \qquad f_i \in L^p, \quad i = 1, \ldots, m \tag{1.2$'$}$$

Dabei ist $\|f\|_p = \{\int_0^1 |f(x)|^p \, dx\}^{1/p}$ gesetzt, entsprechendes gilt für die Bezeichnung $\|f\|_{L^p(a,b)}$.

Aus der Definition der Haar-Funktionen

$$\begin{aligned} \chi_1(x) &= 1, & x &\in [0, 1] = \Delta_1^{(0)} \\ \chi_n(x) &= 2^{k/2}, & x &\in \Delta_{2l-1}^{(k+1)}, \\ &= -2^{-k/2}, & x &\in \Delta_{2l}^{(k+1)}, \\ &= 0, & x &\notin \Delta_l^{(k)}, \ n = 2^k + l, \ l = 1, \ldots, 2^k, \ k = 0, 1, \ldots \end{aligned} \tag{1.3}$$

mit $\Delta_j^{(k)} = ((j-1)/2^k, j/2^k)$, $j = 1, \ldots, 2^k$, $k = 0, 1, \ldots$, folgt, daß die Klasse $H_{2^k} = \operatorname{span}\{\chi_i\}_{i=1}^{2^k}$ mit der aller Treppenfunktionen

$$h(x) = \beta_j, \qquad x \in \Delta_j^{(k)}, \qquad j = 1, \ldots, 2^k$$

zusammenfällt. Aus [11] (Lemma 1.1 und (2.4)) ergibt sich

LEMMA 1. *Sei $f \in L^p(0, 1)$, $0 < p < 1$. Dann existiert eine Treppenfunktion $h_k^* \in H_{2^k}$ $(k = 0, 1,\ldots)$ mit*

$$E_{2^k}^p(f) = \|f - h_k^*\|_p \leqslant 2^{1/p}\omega_p(2^{-k}, f), \qquad k = 0, 1,\ldots \tag{1.4}$$

LEMMA 2. *Für jede Treppenfunktion $h_k = \sum_{i=1}^{2^k} a_i\chi_i \in H_{2^k}$ und $k = 0, 1,\ldots$ kann man Koeffizienten a_i, $i > 2^k$, derart bestimmen, daß die Partialsummenfolge*

$$S_{2^{k+r}}(x; h_k) = \sum_{i=1}^{2^{k+r}} a_i\chi_i(x), \qquad r = 0, 1,\ldots \tag{1.5}$$

der Beziehung

$$\|S_{2^{k+r}}(\,\cdot\,; h_k)\|_p = 2^{-r(1/p-1)}\|h_k\|_p = o(1), \qquad r = 0, 1,\ldots, 0 < p < 1 \tag{1.6}$$

genügt, d.h. in L^p, $0 < p < 1$, gegen $f(x) = 0$ konvergiert.

Beweis. Wir fixieren $k = 0, 1,\ldots$ und bezeichnen mit $\alpha_j^{(k)}$ den Wert, den $h_k(x)$ auf $\Delta_j^{(k)}$ annimmt. Die gesuchte Reihe ist dann

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i\chi_i = \sum_{i=1}^{2^k} a_i\chi_i + \sum_{s=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{2^k} -\alpha_j^{(k)} 2^{(\bar{s}-1-k)/2}\chi_{2^{k+s-1}+j\cdot 2^{s-1}}$$

Durch Nachrechnen überzeugt man sich leicht, daß

$$\begin{aligned} S_{2^{k+r}}(x; h_k) &= 0, & x \in \Delta_i^{(k+r)}, \quad i \neq j\cdot 2^r, \\ &= 2^r\alpha_j^{(k)}, & x \in \Delta_{j\cdot 2^r}^{(k+r)}, \quad j = 1,\ldots, 2^k \end{aligned} \tag{1.7}$$

gilt. Demnach folgt

$$\begin{aligned} \|S_{2^{k+r}}(\cdot\,; h_k)\|_p^p &= \sum_{j=1}^{2^k} 2^{-k-r}\cdot 2^{rp}\,|\alpha_j^{(k)}|^p \\ &= 2^{-r(1-p)}\sum_{j=1}^{2^k} 2^{-k}\,|\alpha_j^{(k)}|^p \\ &= 2^{-r(1-p)}\,\|h_k\|_p^p, \qquad r = 0, 1,\ldots \end{aligned}$$

w.z.b.w.

Bemerkung 1. Die Existens nichttrivialer in der L^p-Metrik gegen $f(x) = 0$ konvergierender Haar-Reihen (sogenannter Null-Reihen) ist bekannt [12]. Lemma 2 liefert Nullreihen $\sum_{i=1}^{\infty} a_i\chi_i(x)$ mit

$$\|S_n\|_p = O(n^{-(1/p-1)}), \; n \to \infty, \qquad \left(S_n(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i\chi_i(x)\right), \; 0 < p < 1, \tag{1.8}$$

wobei eine endliche Zahl von Koeffizienten a_i sogar beliebig vorgegeben werden kann. (1.8) kann nicht weiter verschärft werden, da aus

$$\|S_n\|_p = o(n^{(1/p-1)}), \qquad n \to \infty, \quad 0 < p < 1, \tag{1.9}$$

umgekehrt $a_i = 0$, $i = 1, 2, \ldots$, folgt. Tatsächlich, für die Partialsummenfolge $S_{2^k}(x)$, $k = 0, 1, \ldots$, ergibt sich aus der wichtigen Eigenschaft

$$S_{2^k}(x) \equiv \beta_j^{(k)} = 2^k \int_{\Delta_j^{(k)}} S_{2^{k+r}}(t)\, dt, \qquad x \in \Delta_j^{(k)},\ j = 1, \ldots, 2^k,\ r = 0, 1, \ldots, \tag{1.10}$$

sowie (1.2) gemäß (1.9) die Abschätzung

$$\begin{aligned} \|S_{2^k}\|_p^p &= \sum_{j=1}^{2^k} 2^{-k} |\beta_j^{(k)}|^p = \sum_{j=1}^{2^k} 2^{-k} \left| \sum_{i=(j-1)\cdot 2^r+1}^{j\cdot 2^r} 2^{-r} \beta_i^{(k+r)} \right|^p \\ &\leqslant 2^{r(1-p)} \sum_{i=1}^{2^{k+r}} 2^{-k-r} |\beta_i^{(k+r)}|^p \\ &= 2^{r(1-p)} \|S_{2^{k+r}}\|_p^p = o(1), \qquad r \to \infty, \end{aligned}$$

und somit $S_{2^k}(x) = 0$, $x \in (0, 1)$, $k = 0, 1, \ldots$ w.z.b.w.

Beweis von Theorem 1. Seien $h_k^*(x)$ die bestapproximierenden Haarpolynome aus Lemma 1. Für jede der Funktionen

$$h_k(x) = h_k^*(x) - h_{k-1}^*(x) = \sum_{i=1}^{2^k} a_i^{(k)} \chi_i(x) \in H_{2^k}, \qquad k = 1, 2, \ldots,$$

bestimmen wir gemäß Lemma 2 die Koeffizienten $a_i^{(k)}$, so daß die Reihe

$$\begin{aligned} &h_k(x) + \sigma_k(x; h_k) \\ &\quad \equiv \sum_{i=1}^{2^k} a_i^{(k)} \chi_i(x) + \sum_{i=2^k+1}^{\infty} a_i^{(k)} \chi_i(x), \qquad k = 1, 2 \ldots \end{aligned}$$

der Beziehung (1.6) genügt, sei außerdem $h_0^*(x) = a_1^{(0)} \cdot \chi_1(x)$. Für die Reihe

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\infty} a_i \chi_i &= h_0^* + \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k(\cdot, h_k) \\ &\equiv \sum_{i=3}^{\infty} \left(- \sum_{k=1}^{[\log_2(i-1)]} a_i^{(k)} \right) \chi_i + a_1^{(0)} \chi_1(x) \end{aligned}$$

gilt zunächst

$$\begin{aligned} S_{2^m}(x) &= h_0^*(x) - \sum_{k=1}^{m} \{S_{2^m}(x; h_k) - h_k(x)\} \\ &= h_m^*(x) - \sum_{k=1}^{m} S_{2^{k-(m-k)}}(x; h_k), \qquad m = 0, 1, \ldots \end{aligned}$$

Deshalb kann jetzt under Benutzung von (1.2)′, (1.6) sowie (1.4) auf folgende Art und Weise abgeschätzt werden:

$$\begin{aligned} \|f - S_{2^m}\|_p^p &\leqslant \|f - h_m^*\|_p^p + \sum_{k=1}^{m} 2^{-(m-k)(1-p)} \|h_k\|_p^p \\ &\leqslant E_{2^m}^p(f)^p + 2^{-m(1-p)} \sum_{k=1}^{m} 2^{k(1-p)} \{E_{2^k}^p(f)^p + E_{2^{k-1}}^p(f)^p\} \\ &\leqslant (1 + 2^{1-p}) \cdot 2^{-m(1-p)} \sum_{k=0}^{m} 2^{k(1-p)} E_{2^k}^p(f)^p \\ &\leqslant (2 + 2^{2-p})\, 2^{-m(1-p)} \sum_{k=0}^{m} 2^{k(1-p)} \omega_p(2^{-k}, f)^p, \qquad m = 0, 1, \ldots \end{aligned}$$

Diese Ungleichung ergibt zusammen mit der elementaren Beziehung

$$\|f - S_n\|_p^p \leqslant \|f - S_{2^k}\|_p^p + \|f - S_{2^{k+1}}\|_p^p, \qquad 2^k \leqslant n < 2^{k+1}, \quad k = 0, 1, \ldots \tag{1.11}$$

die in Theorem 1 zu beweisende Behauptung (0.6), wenn mit Hilfe von (1.1) wie gewöhnlich zur Integralschreibweise übergegangen wird.

Damit ist Theorem 1 gezeigt.

Beweis von Theorem 2. Wir stützen uns auf ein Einbettungsresultat, das von E. A. Storoženko [10] (s. auch [11]) bewiesen wurde. Aus der Ungleichung (2.7) in [11] und der Voraussetzung (0.7) folgt

$$\begin{aligned} \|f\|_1^p &\leqslant C_p \left\{ \|f\|_p^p + \left(\sum_{k=0}^{\infty} 2^{(1/p-1)k} \omega_p(2^{-k}, f) \right)^p \right\} \\ &\leqslant C_p \left\{ \|f\|_p^p + \sum_{k=0}^{\infty} 2^{(1-p)k} \omega_p(2^{-k}, f)^p \right\} \\ &\leqslant C_p \left\{ \|f\|_p^p + \int_0^1 \frac{\omega_p(t, f)^p}{t^{2-p}}\, dt \right\} < \infty. \end{aligned} \tag{1.12}$$

Somit ist $f \in L^1(0,1)$. Da für die Haar-Fourierreihe $\sum_{i=1}^{\infty} c_i(f)\chi_i$ dieser Funktion

$$\|f - S_{2^k} f\|_p^p = \sum_{j=1}^{2^k} \int_{\Delta_j^{(k)}} |f(x) - 2^k \int_{\Delta_j^{(k)}} f(t)\,dt|^p\,dx$$
$$= 2^{kp} \sum_{j=1}^{2^k} \int_{\Delta_j^{(k)}} \left| \int_{\Delta_j^{(k)}} (f(x) - f(t))\,dt \right|^p dx, \qquad k = 0, 1, \ldots, \tag{1.13}$$

gilt, benötigen wir entsprechende Abschätzungen der Größen $I_j = \int_{\Delta_j^{(k)}} |f(x) - f(t)|\,dt$, $x \in \Delta_j^{(k)}$, $j = 1, \ldots, 2^k$. Dazu benutzen wir die Ungleichung

$$\|f\|_{L^1(a,b)}^p \leqslant C_p \left\{ (b-a)^{-(1-p)} \|f\|_{L^p(a,b)}^p + \int_0^{b-a} \frac{\int_a^{b-h} |f(t) - f(t+h)|^p\,dt}{h^{2-p}}\,dh \right\} \tag{1.14}$$

die unmittelbar aus (1.12) folgt, indem man dort die Beziehung

$$\omega_p(t, f)^p \leqslant C_p t^{-1} \int_0^t \left(\int_0^{1-h} |f(x) - f(x+h)|^p\,dx \right) dh, \qquad 0 < t \leqslant 1 \tag{1.15}$$

einsetzt, umformt und von $(0, 1)$ zu einem beliebigen Intervall $(a, b) \subset (0, 1)$ übergeht. In (1.14) setzt man $(a, b) = \Delta_j^{(k)}$ und statt $f(t)$ jetzt $f(t) - f(x)$ mit fixiertem $x \in \Delta_j^{(k)}$, so daß sich

$$I_j^p \leqslant C_p \left\{ 2^{k(1-p)} \int_{\Delta_j^{(k)}} |f(x) - f(t)|^p\,dt + \int_0^{2^{-k}} \frac{\int_{(j-1)/2^k}^{j/2^k - h} |f(t) - f(t+h)|^p\,dt}{h^{2-p}}\,dh \right\}$$

ergibt. Diese Ungleiching benutzen wir zur weiteren Abschätzung in (1.13):

$$\|f - S_{2^k} f\|_p^p \leqslant C_p \left\{ 2^k \sum_{j=1}^{2^k} \int_{\Delta_j^{(k)}} \int_{\Delta_j^{(k)}} |f(x) - f(t)|^p\,dt\,dx + 2^{kp-k} \int_0^{2^{-k}} \frac{\sum_{j=1}^{2^k} \int_{(j-1)2^{-k}}^{j \cdot 2^{-k} - h} |f(t) - f(t+h)|^p\,dt}{h^{2-p}}\,dh \right\}$$
$$\leqslant C_p \left\{ \omega_p(2^{-k}, f)^p + 2^{k(p-1)} \int_0^{2^{-k}} \frac{\omega_p(t, f)^p}{t^{2-p}}\,dt \right\}$$
$$\leqslant C_p 2^{-k(1-p)} \int_0^{2^{-k}} \omega_p(t, f)^p \cdot t^{p-2}\,dt, \qquad k = 0, 1, \ldots .$$

Unter Berücksichtigung von (1.11) und (1.1) ist damit Theorem 2 bewiesen.

Bemerkung 2. In den Voraussetzungen von Theorem 2 ist die Haar-Fourierreihe von f die einzige Reihe, die eine Abschätzung der Form (0.8) zuläßt. Im gegenteiligen Fall gäbe es nämlich eine nichttriviale Haar-Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} a_i \chi_i(x)$ mit der Eigenschaft

$$\|S_n\|_p \leqslant C_p \left(n^{-(1/p-1)} \int_0^{1/n} \omega_p(t, f)^p t^{p-2}\, dt\right)$$
$$= o(n^{-(1/p-1)}), \qquad n \to \infty,$$

was im Widerspruch zu dem in Bemerkung 1 Gesagten steht.

Die Abschätzung in Theorem 1 dagegen wird gemäß (1.8) durch unendlich viele Haar-Reihen realisiert.

2

Wir wenden uns in diesem Paragraph einigen Folgerungen aus den in §1 bewiesenen Abschätzungen (0.6) und (0.8) zu. Dabei spielen die Funktionen

$$\begin{aligned} F(x) \equiv F(x; \{b_s\}) &= 0, \qquad x \in (2 \cdot 4^{-s-1}, 4^{-s}) \\ &= b_s, \qquad x \in (4^{-s-1}, 2 \cdot 4^{-s-1}),\ s = 0, 1, \ldots \end{aligned} \tag{2.1}$$

($b_s \geqslant 0$, $s = 0, 1, \ldots$) eine wichtige Rolle.

LEMMA 3. *Sei $F \in L^p(0, 1)$, $0 < p < 1$, eine Funktion vom Typ* (2.1). *Dann gilt*

$$\omega_p(4^{-s}, F) \leqslant C_p \left\{4^{-s} \sum_{j=0}^{s-1} b_j^p + \sum_{j=s}^{\infty} 4^{-j-1} b_j^p\right\}^{1/p}, \qquad s = 0, 1, \ldots \tag{2.2}$$

$$E_{4^s}^p(F) \leqslant C_p \left\{\sum_{j=s}^{\infty} 4^{-j-1} b_j^p\right\}^{1/p}, \qquad s = 0, 1, \ldots \tag{2.3}$$

sowie

$$\|F - S_{4^k}\|_p \geqslant C_p 4^{-k(1/p-1)} \left\{\left|\sum_{i=k}^{m-1} 4^{-i-1} b_i\right|^p - 2 \cdot 4^{m(1-p)} \|F - S_{4^m}\|_p^p\right\}^{1/p}, \qquad m > k \tag{2.4}$$

für die Partialsummen $S_{4^k}(x)$ einer beliebigen Haar-Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} a_i \chi_i(x)$.

Beweis. Aus der Definition der Bestapproximation (0.1) ergibt sich gemäß (2.1) sofort

$$E^p_{4^s}(F)^p \leqslant \int_0^{4^{-s}} |F(x)|^p \, dx = \sum_{j=s}^{\infty} 4^{-j-1} b_j^p, \qquad s = 0, 1,\dots$$

Damit ist (2.3) gezeigt. Zum Nachweis von (2.2) fixieren wir $s = 1, 2,\dots$ und betrachten $h \in (0, 4^{-s})$. Dann ist dank (1.2) und (2.1)

$$\begin{aligned}
&\int_0^{1-h} |F(x) - F(x+h)|^p \, dx \\
&\quad\leqslant \int_0^{4^{-s}} (|F(x)|^p + |F(x+h)|^p) \, dx + \int_{4^{-s}}^{1-h} |F(x) - F(x+h)|^p \, dx \\
&\quad\leqslant \sum_{j=s-1}^{\infty} 2 \cdot 4^{-j-1} b_j^p + 2 \sum_{j=0}^{s-1} |h b_j|^p, \qquad s = 1, 2,\dots
\end{aligned}$$

Wenn man hier das Supremum bezüglich h nimmt, ergibt sich (2.2).

Wir fixieren nun $m > k$ und definieren unter Berücksichtigung der speziellen Struktur von $F(x)$ die Zahlen $\gamma_i, i = 1,\dots, 4^m$, aus

$$\begin{aligned}
S_{4^m}(x) &= \gamma_1, && x \in \Delta_1^{(2m)}, \\
&= \gamma_i, && x \in \Delta_i^{(2m)} \subset (2 \cdot 4^{-s-1}, 4^{-s}), \\
&= b_s + \gamma_i, && x \in \Delta_i^{(2m)} \subset (4^{-s-1}, 2 \cdot 4^{-s-1}), \\
& s = 0,\dots, m-1; && i = 2,\dots, 4^m.
\end{aligned}$$

Dank dieser Festlegung folgt einerseits

$$\begin{aligned}
\|F - S_{4^m}\|_p^p &\geqslant \int_{2 \cdot 4^{-m-1}}^{1} |F(x) - S_{4^m}(x)|^p \, dx \\
&= 2 \cdot 4^{-m-1} |\gamma_1|^p + \sum_{i=2}^{4^m} 4^{-m} |\gamma_i|^p
\end{aligned} \tag{2.5}$$

und andererseits gilt für $x \in (0, 4^{-k})$

$$\begin{aligned}
S_{4^k}(x) &= 4^k \int_0^{4^{-k}} S_{4^m}(x) \, dx \\
&= 4^k \left(\sum_{s=k}^{m-1} b_s 4^{-s-1} + \sum_{i=1}^{4^{m-k}} 4^{-m} \gamma_i \right), \qquad k = 0,\dots, m-1.
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Mit Hilfe von (2.5) und (2.6) erhalten wir nun die Abschätzungen

$$\begin{aligned}
\|F-S_{4^k}\|_p^p &\geqslant \int_{2\cdot 4^{-k-1}}^{4^{-k}} |S_{4^k}(x)|^p\,dx \\
&\geqslant \frac{1}{2}\cdot 4^{-k}\cdot 4^{kp}\left\{\left|\sum_{s=k}^{m-1} 4^{-s-1}b_s\right|^p-\sum_{i=1}^{4^{m-k}} 4^{-mp}|\gamma_i|^p\right\} \\
&\geqslant \frac{1}{2}4^{-k(1-p)}\left\{\left|\sum_{s=k}^{m-1} 4^{-s-1}b_s\right|^p-4^{m(1-p)}\sum_{i=1}^{4^m} 4^{-m}|\gamma_i|^p\right\} \\
&\geqslant \frac{1}{2}4^{-k(1-p)}\left\{\left|\sum_{s=k}^{m-1} 4^{-s-1}b_s\right|^p-2\cdot 4^{m(1-p)}\|F-S_{4^m}\|_p^p\right\}.
\end{aligned}$$

Damit ist auch (2.4) bewiesen und Lemma 3 vollständig gezeigt.

Als erste Folgerung aus Lemma 3 wollen wir die in der Einführung angegebene Funktion $f_0\in \mathrm{Lip}(1/p-1,p)$, $0<p<1$, mit der Eigenschaft (0.12) konstruieren. Dazu setzen wir in (2.1), $b_s=4^{s+1}$, $s=0,1,\dots$ und bekommen die gesuchte Funktion $f_0(x)=F(x,\{4^{s+1}\})$. Aus (2.2) folgt

$$\begin{aligned}
\omega_p(4^{-s},f_0)^p &\leqslant C_p\left\{4^{-s}\sum_{j=0}^{s-1}4^{jp}+\sum_{j=s}^{\infty}4^{jp-j-1}\right\} \\
&\leqslant C_p 4^{-s(1-p)}, \qquad s=0,1,\dots
\end{aligned}$$

d.h. $f_0\in \mathrm{Lip}(1/p-1,p)$. Um (0.12) zu beweisen, nehmen wir das Gegenteil an und setzen die Existenz einer Haar-Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n\chi_n(x)$ mit

$$\|f_0-S_n\|_p=o(n^{1-1/p}\cdot\ln n),\qquad n\to\infty$$

voraus. Aus dieser Annahme und (2.4) für $k=0$ ergibt sich

$$\begin{aligned}
\|f_0-S_1\|_p^p \geqslant C_p 4^{-k(1-p)}&\left\{\left(\sum_{i=0}^{m-1}4^{-i-1}\cdot 4^{i+1}\right)^p\right. \\
&\left.-2\cdot 4^{m(1-p)}\|f_0-S_{4^m}\|_p^p\right\} \\
&\geqslant C_p 4^{-k(1-p)}\{m^p-o(m^p)\}\to\infty,\qquad m\to\infty
\end{aligned}$$

und damit ein Widerspruch zu $f_0\in L^p$.

Dieses Beispiel zeigt, daß für Funktionen $f(x)\in L^p(0,1)$, $0<p<1$, die Größen $\|f-S_n\|_p$ im allgemeinen langsamer als die entsprechenden Bestapproximationen gegen Null konvergieren.

Wir wenden uns nun den Klassen H_p^w (0.13) zu. Dabei sei $w(t)^p$ ein Stetigkeitsmodul in $C(0, 1)$, d.h.

$$0 = w(0)^p < w(t)^p \leqslant w(t+\tau)^p \leqslant w(t)^p + w(\tau)^p,$$
$$0 < t < t+\tau \leqslant 1, \quad w \in C(0, 1). \tag{2.7}$$

Das ist auf Grund der Eigenschaften (1.1) des L^p-Stetigkeitsmoduls $\omega_p(t, f)$, $0 < p < 1$, eine natürliche Forderung.

Da aus der Jackson-Typ-Ungleichung (0.2) stets

$$E_n^p(f) = O(w(1/n)), n \to \infty, \qquad f \in H_p^w \tag{2.8}$$

folgt (hier kann man O nicht durch o ersetzen!), ist es naheliegend, diejenigen Klassen H_p^w zu charakteristieren, für die bei der Darstellung beliebiger $f \in H_p^w$ durch Haar-Reihen die gleiche optimale Konvergenzrate $O(w(1/n))$ für $n \to \infty$ erreicht wird.

THEOREM 3. *Sei $0 < p < 1$ und $w(t)$ genüge (2.7).*

(a) *Wenn eine der Bedingungen*

$$\delta^{1/p-1}\left(\int_\delta^1 \frac{w(t)^p}{t^{2-p}}\,dt\right)^{1/p} \leqslant O(w(\delta)), \qquad \delta \to 0 \tag{2.9}$$

oder

$$\delta^{1/p-1}\left(\int_0^\delta \frac{w(t)^p}{t^{2-p}}\,dt\right)^{1/p} = O(w(\delta)), \qquad \delta \to 0 \tag{2.10}$$

erfüllt ist, so hat H_p^w die folgende Eigenschaft: Für jedes $f \in H_p^w$ existiert eine Haar-Reihe

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i \chi_i(x) \qquad mit \qquad \|f - S_n\|_p = O(w(1/n)), \qquad n \to \infty \tag{2.11}$$

(b) *Umgekehrt, wenn für H_p^w die Eigenschaft (2.11) und außerdem*

$$\left(\int_0^\delta \frac{w(t)^p}{t}\,dt\right)^{1/p} + \delta^{1/p}\left(\int_\delta^1 \frac{w(t)^p}{t^2}\,dt\right)^{1/p} = O(w(\delta)), \qquad \delta \to 0 \tag{2.12}$$

gelten, so muß eine der beiden Bedingungen (2.9) oder (2.10) erfüllt sein.

Beweis. Behauptung (a) folgt sofort aus Theorem 1 (im Falle von (2.9)) bzw. aus Theorem 2 (für (2.10)).

Zum Beweis der Notwendigkeit (Teil (b)) bemerken wir zunächst, daß die Bedingungen (2.9) und (2.10) jeweils äquivalent zu

$$\delta^{1/p-1}\int_\delta^1 \frac{w(t)}{t^{1/p}}\,dt = O(w(\delta)), \qquad \delta\to 0 \tag{2.9$'$}$$

und

$$\delta^{1/p-1}\int_0^\delta \frac{w(t)}{t^{1/p}}\,dt = O(w(\delta)), \qquad \delta\to 0 \tag{2.10$'$}$$

sind. Auf den Nachweis dieser einfachen Tatsache wollen wir hier nicht eingehen. Wir setzen in (2.1), $b_s = 4^{(s+1)/p} w(4^{-s-1})$, $s = 0, 1, \ldots$. Für die so konstruierte Funktion $f_1(x) = F(x, \{b_s\})$ haben wir gemäß (2.2) und Voraussetzung (2.12)

$$\begin{aligned}
\omega(4^{-s}, f_1)^p_{L^p} &\leqslant C_p \left\{ 4^{-s} \sum_{j=0}^{s-1} 4^{j+1} \cdot w(4^{-j-1})^p + \sum_{j=s}^{\infty} w(4^{-j-1})^p \right\} \\
&\leqslant C_p \left\{ 4^{-s} \int_{4^{-s}}^1 \frac{w(t)^p}{t^2}\,dt + \int_0^{4^{-s}} \frac{w(t)^p}{t}\,dt \right\} \\
&= O(w(4^{-s})^p), \qquad s\to\infty,
\end{aligned}$$

d.h. es gilt $f_1 \in H_p^w$. Laut Voraussetzung (2.11) gibt es für f_1 eine Haar-Reihe mit

$$\|f_1 - S_n\|_{L^p} = O(w(1/n)), \qquad n\to\infty. \tag{2.13}$$

Wenn (2.9) gilt, so ist (b) bereits bewisen. Sei deshalb (2.9) bzw. (2.9)$'$ nicht erfüllt. Dank der Eigenschaften (2.7) von $w(t)$ folgt daraus sofort für $k = 0, 1, \ldots$ die Beziehung

$$\lim_{m\to\infty} \left(\int_{4^{-m}}^{4^{-k}} \frac{w(t)}{t^{1/p}}\,dt \right) \frac{4^{-m(1/p-1)}}{w(4^{-m})} = \infty, \qquad m > k. \tag{2.14}$$

Nun wenden wir die Beziehung (2.4) aus Lemma 3 an:

$$\begin{aligned}
\|f_1 - S_{4^k}\|_{L^p} \geqslant C_p \cdot 4^{-k(1/p-1)} \Bigg\{ \Bigg| \sum_{i=k}^{m-1} 4^{-i-1} 4^{(i+1)/p} w(4^{-i-1}) \Bigg|^p \\
- 2\cdot 4^{m(1-p)} \|f_1 - S_{4^m}\|^p_{L^p} \Bigg\}^{1/p}, \qquad m > k
\end{aligned}$$

Unter Berücksichtigung von (2.7) geht man hier zur Integralschreibweise über und erhält mit Hilfe von (2.13)

$$\|f_1 - S_{4^k}\|_{L^p} \geqslant C_p 4^{-k(1/p-1)} \left\{ \left(\int_{4^{-m}}^{4^{-k}} \frac{w(t)}{t^{1/p}}\, dt \right)^p - O(4^{m(1-p)} w(4^{-m})^p) \right\}^{1/p}, \qquad m > k$$

Für $m \to \infty$ erhält man deshalb gemäß (2.14)

$$\begin{aligned} \|f_1 - S_{4^k}\|_{L^p} &\geqslant C_p 4^{-k(1/p-1)} \varlimsup_{m\to\infty} \left\{ \int_{4^{-m}}^{4^{-k}} \frac{w(t)}{t^{1/p}}\, dt \right\} \\ &\quad \cdot \left\{ 1 - O\left(\frac{4^{m(1/p-1)} w(4^{-m})}{\int_{4^{-m}}^{4^{-k}} w(t) \cdot t^{-1/p}\, dt} \right)^p \right\}^{1/p} \\ &\geqslant C_p 4^{-k(1/p-1)} \int_0^{4^{-k}} \frac{w(t)}{t^{1/p}}\, dt, \qquad k = 0, 1, \ldots \end{aligned}$$

Diese Abschätzung und wiederum (2.13) implizieren die Richtigkeit von (2.10)' bzw. (2.10). Damit ist die Behauptung (b) und Theorem 3 insgesamt bewiesen.

Bemerkung 3. Die zusätzliche Voraussetzung (2.12) garantiert eine gewissse Regularität von $w(t)$ (sie ist z.B. für $w(t) = t^\alpha$, $0 < \alpha < 1/p$, erfüllt, nicht aber im Fall $\alpha = 1/p$) und vereinfacht den Beweis von Teil b). In der Literatur sind zu (2.12) äquivalente Bedingungen angegeben (s. [1]). Es ist wahrscheinlich, daß die Aussage in Teil b) von Theorem 3 auch ohne (2.12) bestehen bleibt.

Im letzten Teil dieses Paragraphen betrachten wir die Klassen

$$\begin{aligned} B^s_{p,q}(0,1) = \Big\{ f \in L^p(0,1)\colon \|f\|_{B^s_{p,q}} \\ = \left(\|f\|_{L^p} + \left\{ \int_0^1 \frac{\omega_p(t,f)^q}{t^{sq+1}}\, dt \right\}^{1/q} \right) < \infty \Big\}. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Hier sei $0 < p < 1$, $0 < q < \infty$, $0 < s < 1/p$ (zur Definition und einigen Eigenschaften s. [7, §4]). Für diese Parameterwerte stellt $B^s_{p,q}(0,1)$ einen Quasi-Banachraum dar, wobei die Topologie auch mit Hilfe der folgenden äquivalenten Quasi-Normen definiert werden kann:

$$\|f\|^*_{B^s_{p,q}} = \|f\|_p + \left\{ \int_0^1 \frac{\left(\int_0^{1-h} |f(x) - f(x+h)|^p\, dx\right)^{q/p}}{h^{qs+1}}\, dh \right\}^{1/q}. \tag{2.16}$$

$$\|f\|^{**}_{B^s_{p,q}} = \|f\|_{L^p} + \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} 2^{iqs} E^p_{2^i}(f)^q \right\}^{1/q}. \tag{2.17}$$

Der Nachweis dieses Sachverhalts ergibt sich für (2.16) aus der Ungleichung (1.15), zur Herleitung im Fall (2.17) s. [7, §4]. Für $1 \leqslant p < \infty$ sind ähnliche Aussagen bekannt, vergleiche z.B. [9].

H. Triebel [15] hat die Existenz von Schauderbasen in Besov-Typ-Räumen $B^s_{p,q}(R^n)$, denen im Vergleich zu (2.15) ein anderer Definitionsgedanke zugrunde liegt (ausführlich dazu s. [13, 14]), für $0 < p < 1$ untersucht und zu diesem Zweck das Haar-System H herangezogen. Dabei wurde in [15] faktisch bewiesen, daß H für die Parameterwerte $1/2 < p < 1$, $1/p - 1 < s < 1$ und $0 < q < \infty$ eine Schauderbasis in den Quasi-Banachräumen $B^s_{p,q}(0, 1)$ bildet. Wir ergänzen dieses Resultat von H. Triebel durch folgenden Satz.

THEOREM 4. *Sei* $0 < p < 1$. *Dann bildet das Haar-System* H *eine Schauderbasis in* $B^s_{p,q}(0, 1)$, *wenn*

$$1/p - 1 < s < 1/p, 0 < q < \infty \qquad \textit{oder} \qquad s = 1/p - 1, 0 < q \leqslant p \tag{2.18}$$

gilt. Für die Werte

$$0 < s < 1/p - 1, 0 < q < \infty \qquad \textit{oder} \qquad s = 1/p - 1, 1 < q < \infty \tag{2.19}$$

dagegen existieren keine nichttrivialen, auf $B^s_{p,q}(0, 1)$ *definierten stetigen linearen Funktionale und damit auch keine Schauderbasen.*

Beweis. Da $B^s_{p,q}(0, 1)$ $(0 < p < 1)$ ein F-Raum mit der durch

$$\rho(f, 0) = \|f\|^{\beta}_{L^p} + \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} 2^{iqs} E^p_{2^i}(f)^q \right\}^{\beta/q}, \qquad \beta = \min(p, q) \tag{2.20}$$

gegebenen translationsinvarianten Metrik ρ ist, so ergibt sich bereits, daß H eine Schauderbasis in diesem Raum ist, wenn wir nur nachweisen, daß jede Funktion aus $B^s_{p,q}(0, 1)$ durch genau eine konvergierende Haar-Reihe dargestellt werden kann. Für die Werte (2.18) ist, wie man auf Grund der Definitions (2.15) und (1.12) leicht einsieht $B^s_{p,q}(0, 1) \subset B^{1/p-1}_{p,p}(0, 1) \subset L^1(0, 1)$, wobei diese Einbettungen stetig sind. Da aber H eine Basis in L^1 bildet, folgt daraus, daß die Darstellung einer Funktion $f(x)$ aus $B^s_{p,q}(0, 1)$ (wenn überhaupt) nur durch deren Haar-Fourierreihe möglich und damit eindeutig ist. Es genügt somit, die Beziehung

$$\|f - S_n f\|_{B^s_{p,q}} = o(1), \qquad n \to \infty; f \in B^s_{p,q}(0, 1), \tag{2.21}$$

für die Werte (2.18) nachzuweisen.

Sei $2^k \leqslant n < 2^{k+1}, k = 0, 1, \ldots$. Dann gilt dank der Eigenschaften der Bestapproximation und (2.17)

$$\begin{aligned}\|f - S_n f\|_{B^s_{p,q}} &\leqslant C_{p,q,s} \|f - S_n f\|^{**}_{B^s_{p,q}} \\ &= C_{p,q,s}\left(\|f - S_n f\|_p + \left\{\sum_{i=0}^{\infty} 2^{iqs} E^p_{2^i}(f - S_n f)^q\right\}^{1/q}\right) \\ &\leqslant C_{p,q,s}\left(n^s \|f - S_n f\|_p + \left\{\sum_{i=k+1}^{\infty} 2^{iqs} E^p_{2^i}(f)^q\right\}^{1/q}\right).\end{aligned}$$

Der zweite Summand ist $o(1)$, $n \to \infty$, wegen $f \in B^s_{p,q}(0, 1)$. Für den ersten Summanden ergibt sich aus Theorem 2 mit Hilfe von (1.2) bzw. der Minkowski-Ungleichung

$$\begin{aligned}&n^s \|f - S_n f\|_p \\ &\quad\leqslant C_p n^{s-1/p+1} \left\{\int_0^{1/n} \frac{\omega_p(t, f)^p}{t^{2-p}}\, dt\right\}^{1/p} \\ &\quad\leqslant C_{p,s} \cdot 2^{k(s-1/p+1)} \left\{\left(\sum_{i=k}^{\infty} 2^{i(1-p)} \omega_p(2^{-i}, f)^p\right)^{q/p}\right\}^{1/q} \\ &\quad\leqslant C_{p,s} 2^{k(s-1/p+1)} \\ &\quad\quad\times \begin{cases} \left(\sum_{i=k}^{\infty} 2^{i(1/p-1)q} \omega_p(2^{-i}, f)^q\right)^{1/q}, & q/p \leqslant 1,\ 1/p - 1 \leqslant s < 1/p, \\ \left(\left(\sum_{i=k}^{\infty} 2^{-i\alpha}\right)^{q/p-1} \left(\sum_{i=k}^{\infty} 2^{-i\alpha} \cdot 2^{i(1/p-1)q} \cdot 2^{i\alpha(q/p)} \omega_p(2^{-i}, f)^q\right)\right)^{1/q}, & \\ & q/p > 1,\ 1/p - 1 < s < 1/p,\end{cases}\end{aligned}$$

wobei $\alpha > 0$ so gewählt wird, daß $(s - 1/p + 1) - \alpha \cdot (1/p - 1/q) > 0$ gilt. Deshalb kann weiter

$$\begin{aligned}&n^s \|f - S_n f\|_p \\ &\quad\leqslant C_{p,q,s} \begin{cases} \left(\sum_{i=k}^{\infty} 2^{k(s-1/p+1)q} \cdot 2^{i(1/p-1)q} \omega_p(2^{-i}, f)^q\right)^{1/q}, & q/p \leqslant 1 \\ \left(\sum_{i=k}^{\infty} 2^{k((s-1/p+1)-\alpha(1/p-1/q))q} \right. & \\ \quad \left. \cdot\, 2^{i(\alpha(1/p-1/q)+1/p-1)q} \omega_p(2^{-i}, f)^q\right)^{1/q}, & q/p > 1\end{cases}\end{aligned}$$

$$\leqslant C_{p,q,s}\left(\sum_{i=k}^{\infty} 2^{isq}\omega_p(2^{-i},f)^q\right)^{1/q}$$

$$\leqslant C_{p,q,s}\left(\int_0^{1/n}\frac{\omega_p(t,f)^q\,dt}{t^{sq}\cdot t}\right)^{1/q}=o(1),\qquad n\to\infty,$$

abgeschätzt werden. Damit ist der erste Teil von Theorem 4 bewiesen.

Zum Beweis des zweiten Teils betrachtet man ein beliebiges stetiges lineares Funktional $\Phi\colon B^s_{p,q}(0,1)\to R^1$, d.h. sei

$$|\Phi(f)|\leqslant C_\Phi\,\|f\|_{B^s_{p,q}},\qquad f(x)\in B^s_{p,q}(0,1). \tag{2.22}$$

Unter der Voraussetzung (2.19) muß $\Phi(f)\equiv 0$ gezeigt werden. Da die Vereinigung der Klassen $H_{2^k}=\operatorname{span}\{\chi_i\}_{i=1}^{2^k}$, $k=0,1,\ldots$, dicht in $B^s_{p,q}(0,1)$ ist (das folgt aus den Eigenschaften der Quasi-Norm (2.17)) genügt es, die Beziehung

$$\Phi(h_j^{(k)})=0,\qquad h_j^{(k)}(x)=\begin{cases}0, & x\notin\Delta_j^{(k)}\\ 1, & x\in\Delta_j^{(k)},\ j=1,\ldots,2^k,\ k=0,1,\ldots\end{cases} \tag{2.23}$$

zu zeigen. Sei zunächst $0<s<1/p-1$, $0<q<\infty$. Da offensichtlich

$$E^p_{2^i}(h_j^{(k)})=\begin{cases}2^{-k/p}, & i=0,\ldots,k-1\\ 0, & i=k,k+1,\ldots,\ j=1,\ldots,2^k,\ k=0,1,\ldots\ (0<p<1)\end{cases}$$

gilt, so haben wir

$$\|h_j^{(k)}\|^{**}_{B^s_{p,q}}=2^{-k/p}\left(1+\left(\sum_{i=0}^{k-1}2^{isq}\right)^{1/q}\right)$$

$$\leqslant C_{s,q}2^{k(s-1/p)},\qquad j=1,\ldots,2^k,\ k=0,1,\ldots.$$

Hieraus ergibt sich unter Berücksichtigung von (2.22)

$$|\Phi(h_j^{(k)})|=\left|\Phi\left(\sum_{s=2^r(j-1)+1}^{2^rj}h_s^{(k+r)}\right)\right|\leqslant\sum_{s=2^r(j-1)+1}^{2^rj}|\Phi(h_s^{(k+r)})|$$

$$\leqslant C_\Phi\cdot\sum_{s=2^r(j-1)+1}^{2^rj}\|h_s^{(k+r)}\|_{B^s_{p,q}}$$

$$\leqslant C_{\Phi,p,q,s}2^{k(s-1/p)}\cdot 2^{r(s-1/p+1)}=o(1),\ r\to\infty$$

und (2.23) ist gezeigt. Es bleibt noch der etwas schwierigere Fall $s=1/p-1$,

$1 < q < \infty$, zu betrachten. Wir geben lediglich den Beweisgedanken an und lassen die technischen Details weg. Sei für $r = 1, 2, \ldots$ die Funktion

$$\begin{aligned} g^{(r)}(x) &= 2^{i-r}(r+1)^{-1}, \qquad x \in (2^{-i}, 2^{-i+1}),\ i = 1, \ldots, r \\ &= (r+1)^{-1}, \qquad x \in (0, 2^{-r}) \end{aligned}$$

definiert und mit der Periode 1 auf R^1 fortgesetzt. Die Funktionen

$$g_j^{(r)}(x) = g^{(r)}(x - j \cdot 2^{-r}), \qquad x \in (0, 1),\ j = 1, \ldots, 2^r$$

genügen den Beziehungen

$$\sum_{j=1}^{2^r} g_j^{(r)}(x) = h_1^{(0)}(x) \equiv 1, \qquad x \in (0, 1),\ r = 1, 2, \ldots \tag{2.24}$$

und

$$\| g_j^{(r)} \|_{B^{1/p-1}_{p,q}} \leqslant C_{p,q} \cdot 2^{-r}(r+1)^{1/q-1},$$
$$j = 1, \ldots, 2^r,\ r = 1, 2, \ldots,\ q \in (1, \infty) \tag{2.25}$$

die durch direkte Berechnung erhalten werden können. Wie oben folgt nun

$$\begin{aligned} |\Phi(h_1^{(0)})| &\leqslant \sum_{j=1}^{2^r} |\Phi(g_j^{(r)})| \\ &\leqslant C_{\Phi,p,q} \cdot 2^r \cdot 2^{-r}(r+1)^{1/q-1} = o(1), \qquad r \to \infty. \end{aligned}$$

Damit ist (2.23) für $k = 0$ gezeigt, der Nachweis für $k = 1, 2, \ldots$ geschieht analog (man transformiert dazu die obigen Funktionen $g_j^{(r)}(x)$ von $(0, 1)$ entsprechend auf $\Delta_i^{(k)}$ und setzt sie mit dem Wert 0 auf ganz $(0, 1)$ fort, so daß man eine (2.24) entsprechende Zerlegung von $h_i^{(k)}(x)$ erhält).

Theorem 4 ist vollständig bewiesen.

Bemerkung 4. Theorem 4 läßt lediglich den Fall $s = 1/p - 1$, $p < q \leqslant 1$ offen. Wahrscheinlich ist, daß das Haar-System H auch für diese Klassen $B^s_{p,q}(0, 1)$ eine Schauderbasis bildet.

Ähnliche Sätze können auch für Spline-Systeme, die aus Spline-Funktionen höherer Ordnung bestehen, hergeleitet werden. Zur Definition und wichtigen Eigenschaften solcher Funktionensysteme siehe die Arbeiten von Z. Ciesielski, J. Domsta, S. Ropela u.a. (z.B. [3, 4, 9]). Darauf soll an anderer Stelle eingegangen werden.

3

In diesem Paragraph betrachten wir Konvergenzgeschwindigkeitsabschätzungen für die Darstellung von Funktionen $f \in L^p(0, 1)$, $0 < p < \infty$, durch Reihen nach dem Faber–Schauder-System

$$F = \{\varphi_i\}_{i=0}^{\infty}, \varphi_0(x) = 0, \varphi_i(x) = \int_0^x \chi_i(t)\, dt, \qquad x \in (0, 1),$$

$i = 1, 2, \ldots$. Wir definieren wieder entsprechende Bestapproximationen

$$\bar{E}_n^p(f) = \inf_{l \in L_n} \|f - l\|_{L^p}, \qquad f \in L^p(0, 1), 0 < p < \infty, n = 0, 1, \ldots \quad (3.1)$$

bezüglich der Unterräume linearer Spline-Funktionen $L_n = \text{span}\{\varphi_i\}_{i=1}^n$, $n = 0, 1, \ldots$. Es gilt

$$\bar{E}_n^p(f) \leqslant C_p \omega_{2,p}(1/2n, f), \qquad n = 1, 2, \ldots \quad (3.2)$$

wobei

$$\omega_{2,p}(t, f) = \sup_{0 \leqslant h \leqslant t} \left\{ \int_0^{1-2h} |\Delta_h^2 f(x)|^p\, dx \right\}^{1/p}, \qquad t \in (0, \tfrac{1}{2}) \quad (3.3)$$

den Stetigkeitsmodul 2. Ordnung der Funktion $f \in L^p(0, 1)$, $0 < p < \infty$, darstellt (hier ist wie gewöhnlich $\Delta_h^2 f(x) = f(x) - 2f(x + h) + f(x + 2h)$). Einen Beweis von (3.2) für $1 \leqslant p < \infty$ findet man in [3], für $0 < p < 1$ in [7].

Bekanntlich ist F das klassische Basissystem im Raum $C(0, 1)$, in $L^p(0, 1)$ dagegen stellt es keine Basis dar ($0 < p < \infty$), obwohl für jede Funktion $f \in L^p$ Reihen $\sum_{i=0}^{\infty} a_i \varphi_i(x)$ mit

$$\|f - S_n\|_{L^p} = o(1), n \to \infty; \qquad S_n(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i \varphi_i(x) \quad (3.4)$$

existieren (die Darstellung ist nicht eindeutig). Zu diesen Fragen siehe [17].

Zunächst werden wir analoge Ergebnisse über die in (3.4) mögliche Konvergenzgeschwindigkeit herleiten. Im Unterschied zum Haar-System, bei dessen Betrachtung in §§ 1, 2 ein enger Zusammenhang zu Einbettungsbedingungen in L^1 sichtbar wurde ("kritischer" Parameter $\alpha = 1/p - 1$ in der Lipschitz-Skala), spielt jetzt die Frage der Einbettung von Funktionen nach $C(0, 1)$ eine entsprechende Rolle (demzufolge "kritischer" Parameter $\alpha = 1/p$).

THEOREM 5. *Sei* $f\in L^p(0,1)$, $0<p<\infty$. *Dann existieren Reihen* $\sum_{i=0}^{\infty} a_i\varphi_i(x)$, *für die die Abschätzung*

$$\|f-S_n\|_p \leqslant C_p n^{-1/p}\begin{cases}\displaystyle\int_{1/2(n+1)}^{1}\frac{\omega_{2,p}(t,f)}{t^{1/p+1}}\,dt, & 1\leqslant p<\infty,\\ \displaystyle\left(\int_{1/2(n+1)}^{1}\frac{\omega_{2,p}(t,f)^p}{t^2}\,dt\right)^{1/p}, & 0<p<1,\ n=1,2,\ldots\end{cases}\tag{3.5}$$

gilt.

Beweis. Sei $0<p<\infty$ fixiert und $f\in L^p(0,1)$. Wir setzen

$$l_k(x)=l_k^*(x)-l_{k-1}^*(x)=\sum_{i=0}^{2^k} a_i^{(k)}\varphi_i(x)\in L_{2^k},\qquad k=1,2,\ldots$$

Hier bezeichnen $l_k^*\in L_{2^k}$, $k=0,1,\ldots$, die linearen Spline-Funktionen, für die

$$\|f-l_k^*\|_p=\bar{E}^p_{2^k}(f)\leqslant C_p\,\omega_{2,p}(2^{-k-1},f),\qquad k=0,1,\ldots\tag{3.6}$$

gilt. Für jedes $k=1,2,\ldots$ können wir auf Grund der speziellen Struktur von F Koeffizienten $a_i^{(k)}$, $i>2^k$, derart bestimmen, daß die Partialsummen

$$S_{2^{k+r}}(x;l_k)=\sum_{i=0}^{2^{k+r}} a_i^{(k)}\varphi_i(x)=l_k(x)+\sum_{i=2^k+1}^{2^{k+r}} a_i^{(k)}\varphi_i(x),\qquad r=1,2,\ldots$$

der Reihe $\sum_{i=0}^{\infty} a_i^{(k)}\varphi_i(x)$ die Eigenschaft besitzen:

$$\begin{aligned}S_{2^{k+r}}&(j\cdot 2^{-k-r},l_k)\\ &=l_k(i\cdot 2^{-k}),\qquad j=i\cdot 2^r,\\ &=0,\qquad\qquad\quad j\neq i\cdot 2^r,\quad i=0,\ldots,2^k,\ j=0,\ldots,2^{k+r}\end{aligned}\tag{3.7}$$

was offensichtlich stets möglich ist. Dank (3.7) und der Beziehung

$$\begin{aligned}(b-a)(|l(a)|^p+|l(b)|^p)&\leqslant C_p\int_a^b |l(x)|^p\,dx\\ &\leqslant C_p'(b-a)(|l(a)|^p+|l(b)|^p),\qquad 0<p<\infty\end{aligned}\tag{3.8}$$

die für beliebige lineare Funktionen $l(x)=Ax+B$ und beliebige (a,b), $a<b$, gültig ist, ergibt sich

$$\begin{aligned}\|S_{2^{k+r}}(\cdot,l_k)\|_p&\leqslant C_p\left\{2^{-k-r}\sum_{j=0}^{2^{k+r}}|S_{2^{k+r}}(j\cdot 2^{-k-r},l_k)|^p\right\}^{1/p}\\ &=C_p\cdot 2^{-r/p}\left\{\sum_{i=0}^{2^k}2^{-k}|l_k(i\cdot 2^{-k})|^p\right\}^{1/p}\\ &\leqslant C_p\cdot 2^{-r/p}\|l_k\|_p,\qquad k=1,2,\ldots\end{aligned}$$

und damit die zu Lemma 2 aus 1 analoge Aussage. Die gesuchte Reihe hat die Gestalt

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i \varphi_i(x) = l_0^*(x) - \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{i=2^k+1}^{\infty} a_i^{(k)} \varphi_i(x) \right), \qquad x \in (0, 1),$$

so daß wiederum

$$f(x) - S_{2^m}(x) = f(x) - l_m^*(x) + \sum_{k=1}^{m} S_{2^m}(x, l_k), \qquad m = 0, 1, \ldots,$$

gilt. Die weiteren Abschätzungen laufen für $0 < p < 1$ genau wie im Beweis von Theorem 1, für $1 \leqslant p < \infty$ benutzt man statt (1.2)' die Minkowski-Ungleichung. Dabei werden die (1.1) entsprechenden Eigenschaften des Stetigkeitsmoduls 2. Ordnung

$$\begin{aligned} 0 \leqslant \omega_{2,p}(t, f) \leqslant \omega_{2,p}(\tau, f), \qquad & 0 < t < \tau \leqslant \tfrac{1}{2}, \\ \omega_{2,p}(t, f) \cdot t^{-\gamma(p)} \geqslant C_p \cdot \omega_{2,p}(\tau, f)\, \tau^{-\gamma(p)}, \qquad & \gamma(p) = \max(2, 1 + 1/p) \end{aligned} \tag{3.9}$$

benötigt (für $1 \leqslant p < \infty$ s. [16] oder [6], für $0 < p < 1$ s. [7]). Die Einzelheiten überlassen wir dem Leser. Theorem 5 ist gezeigt.

Dem Beweis des zu Theorem 2 analogen Satzes schicken wir ein Einbettungsresultat voraus. Für $0 < p$, $q < \infty$ und $0 < s < 2 + \max(0, 1/p - 1)$ definieren wir die Klassen (vergleiche auch [7])

$$B^s_{p,q,2}(0, 1) = \left\{ f \in L^p \colon \|f\|_{B^s_{p,q,2}} = \|f\|_p + \left(\int_0^{1/2} \frac{\omega_{2,p}(t, f)^q}{t^{sq+1}}\, dt \right)^{1/q} < \infty \right\}. \tag{3.10}$$

LEMMA 4. *Für* $0 < p < \infty$ *gilt* $B^{1/p}_{p,1,2}(0, 1) \subset C(0, 1)$, *d.h., zu jedem* $f(x) \in B^{1/p}_{p,1,2}(0, 1)$ *existiert eine (eindeutig bestimmte) Funktion* $g(x) \in C(0, 1)$ *mit* $f(x) = g(x)$ *fast überall in* $(0, 1)$. *Wenn außerdem* $g(0) = g(1) = 0$ *ist, so hat man die Abschätzung*

$$\|g\|_C = \max_{x \in (0,1)} |g(x)| \leqslant C_p \int_0^{1/2} \frac{\|\Delta_t^2 f(x)\|_{L^p(0, 1-2t)}}{t^{1+1/p}}\, dt. \tag{3.11}$$

Beweis. Die zu beweisende Einbettung und deren Stetigkeit, d.h.

$$\|g\|_C \leqslant C_p \|f\|_{B^{1/p}_{p,1,2}} = C_p \|g\|_{B^{1/p}_{p,1,2}}, \qquad 0 < p < \infty, \tag{3.12}$$

ist im Fall $1 \leqslant p < \infty$ bekannt (s. [2]), für $0 < p < 1$ läßt sie sich mit Hilfe der Ergebnisse aus [7] (z.B. gilt $B^{1/p}_{p,1,2}(0,1) \subset B^{1}_{1,1,2}(0,1)$, $0 < p < 1$) auf den Fall $1 \leqslant p < \infty$ zurückführen.

Wir kommen daher zum Beweis von (3.11). Zunächst ist klar, daß eine Fortsetzung $\tilde{g}(x)$, $x \in (-1/2, 3/2)$, von $g(x)$ (d.h. $\tilde{g}(x) = g(x)$, $x \in (0,1)$) derart existiert, daß

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}_2(\delta, \tilde{g})_{L^p} &= \sup_{0 \leqslant h \leqslant \delta} \left\{ \int_{-1/2}^{3/2 - 2\delta} |\Delta_h^2 \tilde{g}(x)|^p \, dx \right\}^{1/p} \\ &\leqslant C_p \, \omega_{2,p}(\delta, g), \qquad \delta \in (0, \tfrac{1}{2}], \end{aligned} \tag{3.13}$$

$$\| \tilde{g}(x) \|_{L^p(-1/2, 3/2)} \leqslant C_p \| g \|_p$$

gilt (für $1 \leqslant p < \infty$ siehe [6], der Beweis für $0 < p < 1$ ist analog). Sei $\| g \|_C = g(x_0)$, o.B.d.A. wollen wir $x_0 \in (0, \frac{1}{2})$ annehmen. Laut Voraussetzung $g(0) = 0$ sowie (3.12), (3.13) ergibt sich die Abschätzung

$$\begin{aligned} \| g \|_C &\leqslant 2\, |g(x_0)| - |g(2x_0)| \leqslant |\Delta_{x_0}^2 g(0)| \leqslant C_p \, \| \Delta_{x_0}^2 \tilde{g} \|_{B^{1/p}_{p,1,2}} \\ &\leqslant C_p \left\{ \omega_{2,p}\left(\frac{1}{2}, g\right) + \int_0^{1/2} \frac{\omega_{2,p}(t, g)}{t^{1/p+1}} \, dt \right\} \leqslant C_p \int_0^{1/2} \frac{\omega_{2,p}(t, f)}{t^{1/p+1}} \, dt \end{aligned}$$

Hieraus folgt die interessierende Ungleichung (3.11), wenn man

$$\omega_{2,p}(t, f) \leqslant C_p \frac{1}{t} \int_0^t \| \Delta_h^2 f(x) \|_{L^p(0, 1-2h)} \, dh,$$

$$t \in (0, \tfrac{1}{2}],\ f \in L^p,\ 0 < p < \infty, \tag{3.15}$$

benutzt. Der Beweis dieser einfachen (vielleicht berets bekannten) Beziehung beruht auf der Identität

$$\sum_{j=0}^{2} (-1)^j \binom{2}{j} \Delta^2_{h-jh_1} f(x + jh_1) = \sum_{j=0}^{2} (-1)^j \binom{2}{j} \Delta^2_{(1-j)h_1} f(x + jh),$$

$$0 < h_1 \leqslant h \leqslant \tfrac{1}{2}$$

die in ähnlichem Zusammenhang in [8], Lemma 2, benötigt wurde. Wir wollen auf die Einzelheiten hier nicht eingehen. Lemma 4 ist bewiesen.

THEOREM 6. *Sei* $f \in B^{1/p}_{p,1,2}(0,1)$, $1 \leqslant p < \infty$ bzw. $f \in B^{1/p}_{p,p,2}(0,1)$ $(\subset B^{1/p}_{p,1,2}(0,1))$, $0 < p < 1$. Dann existiert eine fast überall auf $(0,1)$ mit f zusammenfallende stetige Funktion g, deren Basiszerlegung nach dem

Faber–Schauder-System F in $C(0,1)$ wir mit $\sum_{i=0}^{\infty} c_i(f)\varphi_i$ bezeichnen. Für die Partialsummenfolge $S_n f$ dieser eindeutig durch f bestimmten Reihe gilt

$$\|f-S_n f\|_p \leqslant C_p n^{-1/p} \begin{cases} \displaystyle\int_0^{1/2n} \frac{\omega_{2,p}(t,f)}{t^{1/p+1}}\,dt, & 1 \leqslant p < \infty, \\ \displaystyle\left(\int_0^{1/2n} \frac{\omega_{2,p}(t,f)^p}{t^2}\,dt\right)^{1/p}, & 0 < p < 1, n = 1, 2, \ldots \end{cases} \tag{3.16}$$

Beweis. Gemäß Lemma 4 wollen wir $f \in B_{p,1,2}^{1/p}(0,1)$, $0 < p < \infty$, o.B.d.A. selbst als stetig voraussetzen. Da für Reihen nach F die (1.11) entsprechende Beziehung gilt, genügt es, lediglich $n = 2^k$, $k = 0, 1, \ldots,$ zu betrachten. Lemma 4, (3.11), wenden wir auf jedem der Intervalle $\Delta_j^{(k)}$, $j = 1, 2, \ldots, 2^k$, und auf die Funktion $f(x) - S_{2^k} f(x)$ an (für die Basiszerlegung nach F in $C(0,1)$ ist bekanntlich $f(j/2^k) - S_{2^k} f(j/2^k) = 0, j = 0, 1, \ldots, 2^k$):

$$\|f - S_{2^k} f\|_{C(\Delta_j^{(k)})} \leqslant C_p \int_0^{2^{-k-1}} \frac{\|\Delta_t^2 f(x)\|_{L^p((j-1)/2^k,\, j/2^k - 2t)}}{t^{1/p+1}}\,dt, \qquad j = 1, \ldots, 2^k. \tag{3.17}$$

Wir setzen

$$g_k(x,t) = \|\Delta_t^2 f(x)\|_{L^p((j-1)/2^k,\, j/2^k - 2t)}, \qquad x \in \Delta_j^{(k)}, j = 1, \ldots, 2^k, t \in (0, 2^{-k-1}).$$

Dann folgt aus (3.17)

$$\begin{aligned} \|f - S_{2^k} f\|_p &\leqslant \left(\sum_{j=1}^{2^k} \int_{\Delta_j^{(k)}} (\|f - S_{2^k} f\|_{C(\Delta_j^{(k)})})^p\,dx\right)^{1/p} \\ &\leqslant C_p \left(\sum_{j=1}^{2^k} \int_{\Delta_j^{(k)}} \left(\int_0^{2^{-k-1}} \frac{\|\Delta_t^2 f(x)\|_{L^p((j-1)/2^k,\, j/2^k - 2t)}\,dt}{t^{1+1/p}}\right)^p dx\right)^{1/p} \\ &= C_p \left\| \left\| \frac{g_k(x,t)}{t^{1+1/p}} \right\|_{L^1(0,2^{-k-1})} \right\|_p. \end{aligned}$$

Für $1 \leqslant p < \infty$ schließen wir hier die verallgemeinerte Minkowski-Ungleichung an und erhalten

$$\begin{aligned} \|f - S_{2^k} f\|_p &\leqslant C_p \|t^{-1/p-1} \|g_k(x,t)\|_p\|_{L^1(0,2^{-k-1})} \\ &\leqslant C_p \int_0^{2^{-k-1}} t^{-1/p-1} \left(\sum_{j=1}^{2^k} 2^{-k} \|\Delta_t^2 f(x)\|^p_{L^p((j-1)/2^k,\, j/2^k - 2t)}\right)^{1/p} dt \\ &\leqslant C_p \cdot 2^{-k/p} \int_0^{2^{-k-1}} t^{-1/p-1} \omega_{2,p}(t,f)\,dt, \qquad k = 0, 1, \ldots, 1 \leqslant p < \infty. \end{aligned}$$

Für $0 < p < 1$ schätzt man unter der Voraussetzung $f \in B^{1/p}_{p,p,2}(0, 1)$ zunächst grob

$$\left(\int_0^{2^{-k-1}} \frac{\|\Delta_t^2 f\|_{L^p((j-1)/2^k,\, j/2^k - 2t)}}{t^{1/p+1}}\, dt \right)^p$$
$$\leqslant C_p \int_0^{2^{-k-1}} \frac{\|\Delta_t^2 f\|^p_{L^p((j-1)/2^k,\, j/2^k - 2t)}}{t^2}\, dt, \qquad j = 1, \ldots, 2^k,$$

ab, der weitere Beweisgang ist wie in Theorem 2 (s. §1). Damit ist (3.16) gezeigt.

Aufbauend auf Theorem 5 und 6 können wie in §2 für das Haar-System auch für das Faber–Schauder-System F weitergehende Aussagen über das Approximationsverhalten bei der Darstellung von Funktionen durch Reihen gewonnen werden. Wir beschränken uns auf zwei charakteristische Folgerungen für den Fall $1 \leqslant p < \infty$.

Wir definieren entsprechende Lipschitz-Klassen

$$\mathrm{Lip}_2(\alpha, p) = \{ f \in L^p(0, 1) \colon \omega_{2,p}(t, f) = O(t^\alpha),\ t \to 0 \} \tag{3.18}$$

mit $1 \leqslant p < \infty$ und $0 < \alpha \leqslant 2$.

THEOREM 7. *Sei $f \in \mathrm{Lip}_2(\alpha, p)$, $1 \leqslant p < \infty$. Dann existiert eine Reihe $\sum_{i=0}^{\infty} a_i \varphi_i(x)$ nach dem Faber–Schauder-System, für die*

$$\|f - S_n\|_p = O \begin{cases} n^{-\alpha}, & 0 < \alpha < 1/p, \\ n^{-1/p} \ln n, & \alpha = 1/p, \\ n^{-\alpha}, & 1/p < \alpha \leqslant 2, \qquad n \to \infty \end{cases} \tag{3.19}$$

gilt. In (3.19) *kann O in keinem der Fälle durch o ersetzt werden.*

Auf den einfachen Beweis dieses Satzes soll hier verzichtet werden.

THEOREM 8. *Sei $1 \leqslant p < \infty$, $0 < q < \infty$ und $0 < s < 2$. Das Faber–Schauder-System F bilder eine Basis in $B^s_{p,q,2}(0, 2)$ genau dann, wenn*

$$1/p < s < 1/p + 1,\ 0 < q < \infty \qquad \textit{oder} \qquad s = 1/p,\ 0 < q \leqslant 1 \tag{3.20}$$

gilt.

Beweis. Sei $f \in B^s_{p,q,2}(0, 1)$, wobei die Parameterwerte (3.20) genügen mögen. Auf Grund der entsprechenden Einbettungssätze (s. [2] bzw. Lemma 4) können wir f als stetig voraussetzen. Da F in $C(0, 1)$ eine Basis bildet und die betrachteten Klassen $B^s_{p,q,2}(0, 1)$ stetig in $C(0, 1)$ eingebettet sind, ist eine Darstellung in diesen Klassen für f nur durch deren Basiszerlegung $\sum_{i=0}^{\infty} c_i(f)\varphi_i$ überhaupt möglich. Deshalb muß noch

$$\|f-S_nf\|^{**}_{B^s_{p,q,2}}=o(1), \qquad n\to\infty, f\in B^s_{p,q,2}(0,1), \tag{3.21}$$

gezeigt werden. Hierbei stellt

$$\|f\|^{**}_{B^s_{p,q,2}}=\|f\|_p+\left\{\sum_{i=0}^{\infty} 2^{iqs}\bar{E}^p_{2^i}(f)^q\right\}^{1/q} \tag{3.22}$$

eine zu $\|f\|_{B^s_{p,q,2}}$ äquivalente (Quasi-)Norm dar($1\leqslant p<\infty$, $0<q<\infty$, $0<s<1/p+1$), s. S. Ropela [9]. Der Beweis von (3.21) unter der Voraussetzung (3.20) ist nun völlig analog zu dem von Theorem 4 aus §2. Wir verzichten deshalb auf Einzelheiten und geben nur die wichtigen Schritte in der folgenden Abschätzung an. Für $2^k\leqslant n<2^{k+1}$, $k=0, 1,\ldots$, gilt (s. Theorem 6)

$$\begin{aligned}
&\|f-S_nf\|^{**}_{B^s_{p,q,2}}\\
&\quad=\|f-S_nf\|_p+\left\{\sum_{i=0}^{k} 2^{iqs}\bar{E}^p_{2^i}(f-S_nf)^q+\sum_{i=k+1}^{\infty} 2^{iqs}\bar{E}^p_{2^i}(f)^q\right\}^{1/q}\\
&\quad\leqslant C_{p,q,s}\left(n^s\|f-S_nf\|_p+\left\{\sum_{i=k+1}^{\infty} 2^{iqs}\bar{E}^p_{2^i}(f)^q\right\}^{1/q}\right)\\
&\quad\leqslant C_{p,q,s}\left(n^{s-1/p}\int_0^{1/2n} t^{-1/p-1}\omega_{2,p}(t,f)\,dt+o(1)\right)\\
&\quad\leqslant C_{p,q,s}\left(\left\{\int_0^{1/2n} t^{-sq-1}\omega_{2,p}(t,f)^q\,dt\right\}^{1/q}+o(1)\right)=o(1), \qquad n\to\infty.
\end{aligned}$$

Damit ist die Behauptung von Theorem 8 in einer Richtung gezeigt. Wir müssen noch zeigen, daß F keine Basis in $B^s_{p,q,2}(0,1)$ bildet, wenn (3.20) nicht erfüllt ist. Für $1/p+1\leqslant s<2$, $0<q<\infty$ ist das trivial, da $\omega_2(t,\varphi_2)_{L^p}\geqslant C_pt^{1/p+1}$, $t\to 0$, gilt und daher nicht alle Funktionen aus F zu $B^s_{p,q,2}(0,1)$ gehören. Für $0<s<1/P$, $0<q<\infty$ gibt es Nullreihen in $B^s_{p,q,2}(0,1)$, so hat z.B. die Reihe $\sum_{i=0}^{\infty} a_i\varphi_i(x)=\varphi_1(x)-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_{2^k}(x)$ die Eigenschaft $\|S_n\|_{B^s_{p,q,2}}=o(1)$, $n\to\infty$. Deshalb ist die Darstellung mit Faber–Schauder-Reihen in diesem Fall nicht eindeutig und F keine Basis in $B^s_{p,q,2}(0,1)$.

Es bleibt noch der etwas schwierigere Fall $s=1/p$, $1<q<\infty$, zu betrachten, wir fixieren diese Werte ($1\leqslant p<\infty$) und nehmen indirekt an, daß F eine Basis in $B^{1/p}_{p,q,2}(0,1)$ bildet. Für die Funktion

$$\begin{aligned}
f_2(x)&=\ln(k+1), && x=2^{-k},\\
&=\text{linear für} && x\in[2^{-k-1},2^{-k}], k=0,1,\ldots
\end{aligned} \tag{3.23}$$

gilt offenbar

$$\bar{E}^p_{2^k}(f_2) \leqslant \left(\int_0^{2^{-k}} |f_2(x) - \ln(k+1)|^p\,dx\right)^{1/p}$$
$$\leqslant C_p \left(\sum_{j=k+2}^{\infty} 2^{-j} \left(\ln\left(\frac{j}{k+1}\right)\right)^p\right)^{1/p}$$
$$\leqslant C_p 2^{-k/p} \cdot (k+1)^{-1}, \qquad k = 0, 1, \ldots$$

woraus sich (s. (3.22)) $f_2 \in B^{1/p}_{p,q,2}(0,1)$, $1 < q < \infty$, ergibt.

Sei $\sum_{i=0}^{\infty} a_i \varphi_i$ die zu f_2 gehörende eindeutige Reihe, für die

$$\|f_2 - S_n\|_{B^{1/p}_{p,q,2}} = o(1), \qquad n \to \infty \tag{3.24}$$

gilt. Wichtig ist, daß für diese Reihe unbedingt

$$S_{2^k}(x) = f_2(x), \qquad x \in [2^{-k}, 1], \qquad k = 1, 2, \ldots, \tag{3.25}$$

sein muß. Im gegenteiligen Fall könnte man nämlich eine Nullreihe bezüglich F in $B^{1/p}_{p,q,2}(0,1)$ konstruieren, was im Widerspruch zur Eindeutigkeit der Zerlegung des Nullelements in diesem Raum stünde. (Tatsächlich, wenn $\Delta^{(k)}_j$ ein Intervall ist ($j = 2, \ldots, 2^k$), auf dem die lineare Funktion $f_2(x) - S_{2^k}(x)$ nicht verschwindet, so ergibt

$$f_2(t) - S_{2^k}(t) - \sum_{\operatorname{supp} \varphi_i \subset \Delta^{(k)}_j} a_i \varphi_i(t), \qquad t = 2^{-k}(x + j - 1), \qquad x \in (0,1),$$

nach entsprechender Umnumerierung eine Reihe nach F, die gemäß (3.24) in $B^{1/p}_{p,q,2}(0,1)$ gegen Null konvergiert.)

Da wieder für genügend große $k > k_0$, $S_{2^k}(0) = a_0 < \frac{1}{2}\ln(k+1)$ gilt, so folgt aus (3.25) und der Linearität von S_{2^k} auf $(0, 2^{-k})$

$$f_2(x) - S_{2^k}(x) \geqslant f_2(x) - 3/4 \ln(k+1) \geqslant 1/4 f_2(x), \qquad x \in (0, 2^{-k-1}).$$

Daher haben wir weiter (s. (3.25) und (3.3))

$$\bar{\omega}_p(2^{-k}, f_2 - S_{2^k})$$
$$\geqslant \left(\int_0^{1-2^{-k+1}} |\Delta^2_{2^{-k}}(f_2(x) - S_{2^k}(x))|^p\,dx\right)^{1/p}$$
$$\geqslant \left(\int_0^{2^{-k-1}} |f_2(x) - S_{2^k}(x)|^p\,dx\right)^{1/p} \geqslant \frac{1}{4}\left(\int_0^{2^{-k-1}} |f_2(x)|^p\,dx\right)^{1/p}$$
$$\geqslant C_p \left(\sum_{i=k+2}^{\infty} 2^{-i}(\ln(i+1))^p\right)^{1/p} \geqslant C_p 2^{-k \cdot 1/p} \ln(k+1), \qquad k > k_0.$$

In(3.10) eingesetzt, ergibt sich nun

$$\begin{aligned} \|f_2 - S_{2k}\|_{B^{\nu p}_{p,q,2}} &\geqslant C_{p,q} 2^{k/p} \omega_{2,p}(2^{-k}, f_2 - S_{2k}) \\ &\geqslant C_{p,q} \ln(k+1), \qquad k > k_0, \end{aligned}$$

was im Widerspruch zu (3.24) steht. Damit ist Theorem 8 vollständig bewiesen.

References

1. N. K. Bari, and S. B. Stečkin, Best approximation and differential properties of two conjugate functions, *Trudy Moskov. Mat. Obšč.* **5** (1956), 483–522. [Russian]
2. O. V. Besov, V. P. Il'in, and S. M. Nikol'skii, "Integral Representations of Functions and Imbedding Theorems," Moscow, Nauka, 1975. [Russian]
3. Z. Ciesielski, Constructive function theory and spline systems, *Studia Math.* **53** (1975), 277–302.
4. Z. Ciesielski and J. Domsta, Construction of an orthonormal basis in $C^m(I^d)$ and $W^m_p(I^d)$, *Studia Math.* **41** (1972), 211–224.
5. V. I. Ivanov, Direct and inverse Theorems of approximation theory in the norm L_p, $0 < p < 1$, *Mat. Zametki* **18** (1975), 641–658. [Russian]
6. H. Johnen, Inequalities connected with the moduli of smoothness, *Mat. Vesnik* **9** (1972), 289–302.
7. P. Oswald, Approximation by splines in the norm L_p, $0 < p < 1$, *Math. Nachr.* **94** (1980), 69–96.
8. P. Oswald, Ungleichungen vom Jackson-Typ für die algebraische beste Approximation in L_p, *J. Approx. Theory* **23** (1978), 113–136.
9. S. Ropela, Spline bases in Besov spaces, *Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Math. Astronom. Phys.* **24** (1976), 319–325.
10. E. A. Storoženko, On some imbedding theorems, *Mat. Zametki* **19** (1976), 187–200. [Russian]
11. E. A. Storoshenko, V. G. Krotov, and P. Oswald, Direct and converse theorems of Jackson type in L^p spaces, $0 < p < 1$, *Mat. Sb.* **98** (140), (1975), 395–415. [Russian]
12. A. A. Talaljan, The representation of functions in the classes $L_p(0, 1)$, $0 < p < 1$, by orthogonal series, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* **21** (1970), 1–9. [Russian]
13. H. Triebel, "Fourier Analysis and Function Spaces," Teubner-Texte Math., Teubner, Leipzig, 1977.
14. H. Triebel, "Spaces of Besov–Hardy–Sobolev Type," Teubner-Texte Math., Teubner, Leipzig, 1978.
15. H. Triebel, On Haar bases in Besov spaces, *Serdica*, in press.
16. A. F. Timan, "Theory of Approximation of Functions of a Real Variable," Pergamon, New York, 1963.
17. P. L. Ul'janov, Representation of functions by series and the classes $\varphi(L)$, *Uspehi Mat. Nauk* **27** (1972), 3–52. [Russian]